数理解析研究所講究録
961 巻 1996 年 1-10

Jacobi 形式と Selberg zeta 関数

立教大学理学部　荒川恒男

1 Introduction

以下、$\Gamma=SL_2(\mathbf{Z})$、$\mathcal{H}$ を上半平面とする。
1950 年代に Selberg [Se1,2] は $\mathcal{H}$ 上の不変微分作用素

$$\Delta=y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

の $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H})$ におけるスペクトル分解の研究を通して、Selberg 跡公式の理論を構築し、Selberg zeta 関数を導入した。Selberg zeta 関数は $\Gamma=SL_2(\mathbf{Z})$ の場合には次で与えられる:

$$Z_\Gamma(s)=\prod_{\{P_0\}_\Gamma,\,\mathrm{tr}P_0>2}\prod_{n=0}^{\infty}(1-N(P_0)^{-s-n})\qquad(\mathrm{Re}(s)>1)$$

ここで、P_0 は $\mathrm{tr}P_0$ を満たす Γ の原始的 hyperbolic 元の Γ-共役類をわたる。$N(P_0)$ は P_0 の固有値（>1）の 2 乗を意味する。$Z_\Gamma(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束し、Selberg 跡公式を介して全 s-平面上の有理型関数に解析接続され、ある関数等式を満たす。これが、Selberg の記念碑的な結果の一部である。
Γ は非常に良い arithmetic な群なので、この場合、$Z_\Gamma(s)$ は単純な極めて arithmetic な表示をもつ:

$$Z_\Gamma(s)=\prod_{n=0}^{\infty}\prod_{D>0}\left(1-\varepsilon_D^{-2s-2n}\right)^{h(D)}$$

ここで、D は $D\equiv 1 \bmod 4$ ないしは $D\equiv 0 \bmod 4$ なる正整数をわたり、$h(D)$ は判別式 D の整係数 2 元 2 次形式の $SL_2(\mathbf{Z})$-同値による類数を表す。ε_D は Pell 方程式 $x^2-Dy^2=4$ の基本解（$\varepsilon_D=\dfrac{t+\beta\sqrt{D}}{2}$, $t^2-D\beta^2=4$）で、$\varepsilon_D>1$ を満たすものである。この表示は Hejahl [He] の p.518 にある。

このノートの目的は、筆者の [Ar1, 2] で導入された、Jacobi 形式の空間と密接な関係にある theta multiplier system つきの Selberg zeta 関数を、上記 Selberg zeta 関数と対比して、なるべく分かりやすく説明することにある。

2 Jacobi 形式

Theta 級数

$e(w) = \exp(2\pi i w)$ $(w \in \mathbf{C})$ とおく。
$\mathcal{D}$ を $\mathcal{H}$ と $\mathbf{C}$ の直積とする: $\mathcal{D} = \mathcal{H} \times \mathbf{C}$. m を正整数とし、固定する。整数 r に対し、theta 級数

$$\theta_r(\tau, z) := \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}} e\Big(m\tau\Big(\lambda + \frac{r}{2m}\Big)^2 + 2mz\Big(\lambda + \frac{r}{2m}\Big)\Big) \qquad (\tau, z) \in \mathcal{D}$$

を定義する。$\theta_{r+2m}(\tau, z) = \theta_r(\tau, z)$ であるので、r は $\mathbf{Z}/2m\mathbf{Z}$ の元とみなしてよい。τ, z の 2 変数の関数としての theta 級数が Jacobi 形式の原形である。すなわち、$\theta_r(\tau, z)$ は z の関数としてはアーベル関数としての性質

$$\theta_r(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e(-m\lambda^2 - 2m\lambda z)\theta_r(\tau, z) \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{Z}$$

を持ち、τ の関数としてはある種の保型関数になる。保型性を記述するため、$\mathbf{Z}/2m\mathbf{Z}$ の元に一定の順序をつけておく。上記の theta 級数 $\theta_r(\tau, z)$ $(r \in \mathbf{Z}/2m\mathbf{Z})$ をこの順序で縦ベクトルに並べたものを $\Theta(\tau, z)$ とする:

$$\Theta(\tau, z) := \Big(\theta_r(\tau, z)\Big)_{r \in \mathbf{Z}/2m\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \theta_r(\tau, z) \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbf{C}, z \neq 0$ に対し、$z^{1/2}$ の分枝を $-\pi < \arg z \leq \pi$ に選ぶ。次の変換公式が成り立つ。

theta 公式

$$(\star)\ \ \Theta(M(\tau, z)) = e\left(\frac{mcz^2}{c\tau + d}\right)(c\tau + d)^{1/2} U(M)\Theta(\tau, z) \qquad \forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

ここで、

$$M(\tau, z) = \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right)$$

とおいた。$U(M) = (u_{r,s}(M))_{r,\, s \in \mathbf{Z}/2m\mathbf{Z}}$ は unique に定まる $2m$ 次の unitary 行列である。

ここで大切な点は、$U(M)$ が modular 群 Γ の射影表現になることである:

$$U(M_1 M_2) = \varepsilon(M_1, M_2) U(M_1) U(M_2) \qquad M_1,\ M_2 \in \Gamma, \qquad \varepsilon(M_1, M_2) = \pm 1$$

$U(M)$ は theta multiplier system と呼ばれる。$\varepsilon(M_1, M_2)$ は正確には

$$\varepsilon(M_1, M_2) = \frac{J(M_1, M_2\langle\tau\rangle)^{1/2} J(M_2, \tau)^{1/2}}{J(M_1 M_2, \tau)^{1/2}}$$

で与えられる。この値は τ には依らない。ここで、$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、$J(M, \tau) = c\tau + d$ である。

<u>例</u>　<u>$m = 1$ の場合</u>:　このとき、$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{0,\ 1\}$ と思ってよい。

$$\theta_0(\tau, z) = \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}} e\Big(\tau\lambda^2 + 2\lambda z\Big), \qquad \theta_1(\tau, z) = \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}} e\Big(\tau\Big(\lambda + \frac{1}{2}\Big)^2 + 2z\Big(\lambda + \frac{1}{2}\Big)\Big),$$

$$\Theta(\tau, z) = \begin{pmatrix} \theta_0(\tau, z) \\ \theta_1(\tau, z) \end{pmatrix}.$$

であり、

$$U\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad U\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

となる (証明は [E-Z] にある)。

<u>Jacobi 形式</u>

$G = SL_2(\mathbf{R})$ とおき、2 次の実 symplectic 群を $Sp_2(\mathbf{R})$ とする:

$$Sp_2(\mathbf{R}) = \left\{ g \in GL_4(\mathbf{R}) \,\middle|\, {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Jacobi 群 G^J は、次の形

$$(\sharp) \qquad \begin{pmatrix} a & & b & \\ & 1 & & \\ c & & d & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \mu \\ & 1 & \mu & \rho \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \lambda & 1 & & \\ & & 1 & -\lambda \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \quad \lambda,\ \mu,\ \rho \in \mathbf{R} \right)$$

の元の成す $Sp_2(\mathbf{R})$ の部分群とする。($\sharp$) の形の元を簡単のため $(M, (\lambda, \mu), \rho)$ と書く。$G = SL_2(\mathbf{R})$ は単射 $M \longrightarrow (M, (0,0), 0)$ により、自然に G^J に埋めこまれる。Jacobi 群 G^J は、G と Heisenberg 群 H との半直積になる:

$$G^J = G \rhd H$$

ただし、

$$H = \{(1_4, (\lambda, \mu), \rho) \mid \lambda,\ \mu,\ \rho \in \mathbf{R}\}$$

であり、Jacobi 形式のアーベル関数としての性質を支配する部分群である。G^J は上半平面と $\mathbf{C}$ との直積 $\mathcal{D} = \mathcal{H} \times \mathbf{C}$ に作用する: $g = (M, (\lambda, \mu), \rho) \in G^J$ と $(\tau, z) \in \mathcal{D}$ に対し、

$$g(\tau, z) := \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right).$$

ただし、$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおいた。次に保型因子を定義する。$m \in \mathbf{Z}_{>0},\ k \in \mathbf{Z}$ に対し、

$$J_{m,k}(g, (\tau, z)) := (c\tau + d)^k e\left(-m\rho - m\lambda^2\tau - 2m\lambda z + \frac{cm}{c\tau + d}(z + \lambda\tau + \mu)^2\right)$$

とおく。この保型因子は性質

$$J_{m,k}(g_1 g_2, (\tau, z)) = J_{m,k}(g_1, g_2(\tau, z)) J_{m,k}(g_2, (\tau, z)) \qquad (g_1,\ g_2 \in G^J)$$

を満たす。G^J の最も自然な離散群 Γ^J を

$$\Gamma^J := \{(M, (\lambda, \mu), \rho \mid M \in \Gamma,\ \lambda,\ \mu,\ \rho \in \mathbf{Z}\}$$

で定義する。

<u>定義　(Jacobi forms of weight k, index m)</u>

$$J_{k,m}(\Gamma) := \left\{ \varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{C} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi \text{ は } \mathcal{D} \text{ 上正則} \\ \text{(ii)} & \varphi(\gamma(\tau, z)) = J_{m,k}(\gamma, (\tau, z))\varphi(\tau, z) \qquad \forall\gamma \in \Gamma^J \\ \text{(iii)} & \text{ある Fourier 展開をもつ} \end{array} \right\}$$

として、weight k , index m の Jacobi 形式の空間を定義する。ここで Fourier 展開は次の形である:

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{\substack{n,\ r \in \mathbf{Z} \\ 4mn - r^2 \geq 0}} c(n, r) e(n\tau + rz)$$

cusp forms の空間は Fourier 係数に関する条件によって

$$J^{cusp}_{k,m}(\Gamma) := \left\{\varphi \in J_{k,m}(\Gamma) \;\middle|\; c(n, r) = 0 \text{ if } 4mn - r^2 = 0\right\}$$

として定義する。

Remark weight k, index m の Jacobi 形式については Eichler-Zagier の非常に優れた exposition である [E-Z] に種々の側面から大変興味深い研究がある。

Jacobi 形式と先程の theta 級数との関係は、

$$\varphi \in J_{k,m}(\Gamma) \Longrightarrow \varphi(\tau, z) = \sum_{r \in \mathbf{Z}/2m\mathbf{Z}} h_r(\tau)\theta_r(\tau, z) = \mathbf{h}(\tau)\Theta(\tau, z)$$

で与えられる。ここで $\mathbf{h}(\tau)$ は

$$\mathbf{h}(\tau) = (\ldots, h_r(\tau), \ldots)$$

とおいた横ベクトルである。各係数 $h_r(\tau)$ は τ の正則関数である。$\mathbf{h}(\tau)$ は次の保型性を満たす半整数 weight のベクトル値保型形式である:

$$\mathbf{h}(M\langle\tau\rangle)U(M) = (c\tau + d)^{k-1/2}\mathbf{h}(\tau) \qquad \forall M \in \Gamma$$

後の都合上、skew-holomorpphic Jacobi 形式も導入する:

$$J^{sk}_{k,m}(\Gamma) := \left\{ \varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \phi \text{ は } \mathcal{D} \text{ 上実解析的} \\ \text{(ii)} \quad \varphi(\gamma(\tau, z)) = J_{m,0}(\gamma, (\tau, z))\overline{(c\tau + d)}^{k-1} \times \\ \qquad |c\tau + d|\varphi(\tau, z) \qquad \forall \gamma \in \Gamma^J \\ \text{(iii) ある Fourier 展開をもつ} \end{array} \right\}$$

$J^{sk}_{k,m}(\Gamma)$ の元を weight k, index m の skew-holomorphic Jacobi 形式と呼ぶ。Fourier 展開は

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{\substack{n,\, r \in \mathbf{Z} \\ 4mn - r^2 \leq 0}} c(n, r) e\left(n\overline{\tau} + \frac{i}{2m} r^2 \mathrm{Im}\tau + rz\right) \qquad (\varphi \in J^{sk}_{k,m}(\Gamma))$$

と書ける。cusp forms の空間は

$$J^{sk,\,cusp}_{k,m}(\Gamma) := \left\{ \varphi \in J^{sk}_{k,m}(\Gamma) \,\middle|\, c(n, r) = 0 \text{ if } 4mn - r^2 = 0 \right\}$$

である。Jacobi 形式の空間 $J_{k,m}(\Gamma)$, $J^{sk}_{k,m}(\Gamma)$ の次元は有限であることが知られている。

3 Selberg zeta 関数

m を固定された正整数とし、$U(M)$ を (♯) で与えられた theta multiplier system とする。$U(-1_2)$ は固有値 $\pm e^{\pi i/2}$ をもち、

$$U(-1_2) = e^{-\pi i/2} \cdot Q \begin{pmatrix} 1_{m+1} & 0 \\ 0 & -1_{m-1} \end{pmatrix} Q^{-1} \qquad \exists Q \quad 2m \text{ 次ユニタリ行列}$$

と書ける。定義から $U(M)$ は $U(-1_2)$ と可換となるので

$$U(M) = Q \begin{pmatrix} U_+(M) & 0 \\ 0 & U_-(M) \end{pmatrix} Q^{-1} \qquad \forall M \in \Gamma$$

の形に分解される。この分解は theta の空間を even theta と odd theta の空間に分解することに相当する。
$U_\pm(M)$ は Fischer [Fi] の本の意味で multiplier system になる。Hejhal [He]、Fischer [Fi] に multiplier system つきの Selberg zeta 関数の一般論があり、それに従って、theta multiplier system $U_\pm(M)$ つきの 2 種類の Selberg zeta 関数を定義する:

<u>Selberg zeta 関数 [Ar1, 2]</u>

$$Z_{m,\pm}(s) := \prod_{\{P_0\}_\Gamma,\, \mathrm{tr} P_0 > 2} \prod_{n=0}^{\infty} \det(1_{m\pm1} - U_\pm(P_0) N(P_0)^{-s-n})$$

で定義する。この zeta 関数はユニタリ行列 Q の取り方に依らない。$U_\pm(P_0)$ は unitary なので、$Z_{m,\pm}(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束する。

$m = 1$ のとき、$Z_{m,+}(s)$ のみ現れる。
ここで、[Ar2] でもう少し一般の形の Selberg zeta 関数が定義されていることに注意する。

これらの Selberg zeta 関数に深く関連する保型形式の空間を与えよう:
k を 0 以上の整数、$\kappa = (k - 1/2)/2$ とおく。半整数保型因子を

$$j_M(\tau, k) := \exp\Big(i(k - 1/2)\arg(c\tau + d)\Big) \qquad \Big(M = M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$$

で定義する。保型形式の空間は

$$\mathcal{H}_k := \left\{ \begin{array}{c} h : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{C}^{2m} \\ \text{measurable} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} h(M\langle\tau\rangle)U(M) = j_M(\tau, k) h(\tau), \quad M \in \Gamma \\ \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \|h(\tau)\|^2 \, d\omega(\tau) < +\infty \end{array} \right\}$$

で定義する。ここで、$\mathbf{C}^{2m}$ は $2m$ 次の横ベクトルの空間、$d\omega(\tau)$ は $\mathcal{H}$ 上の不変測度とする。空間 $\mathcal{H}_k$ で微分作用素:

$$\Delta_k := \eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) - i \left(k - \frac{1}{2} \right) \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \qquad (\tau = \xi + i\eta)$$

のスペクトル分解を考える。$s \in \mathbf{C}$ に対して

$$\mathcal{H}_k(s) := \left\{ f \in \mathcal{H}_k \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{of } C^2 \text{ class} \\ -\Delta_k f = s(1-s) f \end{array} \right\}$$

とおく。$\mathcal{H}_k(s)$ は実解析的 Jacobi 形式の空間と密接な関係がある ([Ar1], Proposition 5.1)。例えば

$$k \geq 2 \implies \mathcal{H}_k(\kappa) \cong J^{cusp}_{k,m}(\Gamma) \qquad (\kappa = \frac{k - 1/2}{2}).$$

上記の設定で "Multiplier system つきの Selberg 跡公式" の一般論にのせる。Multiplier system つきの Selberg 跡公式については、Hejhal が [He] で詳細な議論をしているが、ご存じのように、かなり読みにくい。Fischer [Fi] に、self-contained で比較的簡潔な優れた記述がある。この 2 つ以外には、きちんと書かれたものは無いようである。筆者は Fischer の formulation を用いて、上記の Selberg zeta 関数の解析接続、関数等式、零点の位数と Jacobi 形式の空間の次元との関係等に関して、一定の結果を得た (詳細は [Ar1, 2] 参照)。

Theorem 1 ([Ar1], Theorem4.3) Selberg zeta 関数 $Z_{m,\pm}(s)$ は s の有理型関数に解析接続され、ある関数等式を満たす。区間 $0 \leq s \leq 1$ の零点を除けば $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上に零点が存在する。

関数等式については精密な形を書くと長くなるので、興味のある方は [Ar1], Theorem 4.3 を見て下さい。

Selberg 跡公式の系として、次の定理も成り立つ。

Theorem 2 (i) $\dim_{\mathbf{C}} J^{sk}_{1,m}(\Gamma) = \mathrm{Ord}_{s=3/4} Z_{m,+}(s) = \mathrm{Res}_{s=3/4}\left(Z'_{m,+}/Z_{m,+}(s) \right)$

(ii) $\dim_{\mathbf{C}} J_{1,m}(\Gamma) = \mathrm{Ord}_{s=3/4} Z_{m,-}(s) = \mathrm{Res}_{s=3/4}\left(Z'_{m,-}/Z_{m,-}(s) \right)$

(iii) $\dim_{\mathbf{C}} J^{cusp}_{2,m}(\Gamma) = \mathrm{Ord}_{s=3/4} Z_{m,+}(s) + \lambda(m)$

(iv) $\dim_{\mathbf{C}} J_{2,m}^{sk,\,cusp}(\Gamma) = \mathrm{Ord}_{s=3/4} Z_{m,-}(s) + \mu(m)$

ここで $\lambda(m)$, $\mu(m)$ は初等的に書ける量で、正確な定義は [Ar1], (5.4) にある。

この定理の帰結として大切と思われる点を注意をしておく。

上記定理より

$$(\star)\qquad \begin{aligned} \dim_{\mathbf{C}} J_{2,m}^{cusp}(\Gamma) &= \dim_{\mathbf{C}} J_{1,m}^{sk}(\Gamma) + \lambda(m) \\ \dim_{\mathbf{C}} J_{2,m}^{sk,\,cusp}(\Gamma) &= \dim_{\mathbf{C}} J_{1,m}(\Gamma) + \mu(m) \end{aligned}$$

公式 $(\star)$ は、空間 $J_{2,m}^{cusp}(\Gamma)$ と空間 $J_{1,m}^{sk}(\Gamma)$ との間のある種の双対性（duality）を記述していると考えられる（[Sk-Za2], Sect.3, (11) を見よ)。
一方、Skoruppa ([Sk], [Sk-Za1]) により、

$$\dim_{\mathbf{C}} J_{1,m}^{sk}(\Gamma) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{d\,|\,m} 1 + \delta(m = \text{square})\right\}$$

であることが知られている。ここで

$$\delta(m = \text{square}) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad m = \text{square} \\ 0 & \text{if} \quad m \neq \text{square} \end{cases}$$

この次元公式の証明には、ある種の重さ 1/2 の保型形式の空間は theta 級数で張られるという Serre-Stark の結果 [Se-St] が用いられている。
また Eichler-Zagier [E-Z] により

$$\dim_{\mathbf{C}} J_{1,m}(\Gamma) = 0$$

であることが知られている。これらの結果と、上記 Theorem 2, (i), (ii) を合わせると

Theorem 3 **(i)** $\mathrm{Ord}_{s=3/4} Z_{m,+}(s) = \dfrac{1}{2}\left\{\sum_{d\,|\,m} 1 + \delta(m = \text{square})\right\}$

(ii) $\mathrm{Ord}_{s=3/4} Z_{m,-}(s) = 0$, i.e., $Z_{m,-}(3/4) \neq 0$

という綺麗な式になる。(i) は Selberg zeta 関数 $Z_{m,+}(s)$ が $s = 3/4$ に真に零点をもつことを主張しているわけで、 $Z_{m,+}(s)$ については $1/2 \leq s \leq 1$ の範囲で Riemann

Hypothesis が成り立たないことになる。

最後に、問題を一つ提出して、この稿の終わりとしたい。

Problem　Selberg zeta 関数 $Z_{m,\pm}$ の 2 次形式の類数などを用いた積表示を求めよ。

この問題に対するアプローチの仕方としては、積表示で考えるのは難しいので対数微分を取って、

$$\frac{Z'_{m,\pm}}{Z_{m,\pm}}(s) = \sum_{\{P_0\}_\Gamma,\, \mathrm{tr}P_0>2} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{tr}U_\pm(P_0^k) \cdot \log N(P_0) \cdot \frac{N(P_0)^{-ks}}{1-N(P_0)^{-ks}}$$

の形で考える。$m=1$ のときは次の 2 段階で考える。

(i)　$\mathrm{tr}U(P_0^k)$ の計算

(ii)　$\displaystyle\sum_{\{P_0\}_\Gamma,\, \mathrm{tr}P_0>2} \mathrm{tr}U(P_0^k)$ の計算

(i) については、この跡は Gauss 和を用いて表される ([Sk-Za2], Theorem2 or [Ar2], Proposition 3.6)。
ガウス和をさらに簡単にする為には、(ii) の考察が必要で、2 次形式論的な議論が必須のように思われる。

参考文献

[Ar1] Arakawa, T.: Selberg zeta functions associated with a theta multiplier system of $SL_2(\mathbf{Z})$. Math. Ann. **293**(1992), 213-237.

[Ar2] Arakawa, T.: Selberg zeta functions and Jacobi forms. Adv. Studies in Pure Math. **21**(1992), 181-218.

[E-Z] Eichler, M. and Zagier, D.: The theory of Jacobi forms. Birkhäuser: Boston, Basel, Stuttgart, 1985.

[Fi] Fischer. J.: An approach to the Selberg trace formula via the Selberg zeta-function. Lecture Notes in Math. 1253, Springer, 1987.

[He] Hejahl, D. A.: The Selberg trace formula for $PSL(2, \mathbf{R})$. Vol.2 Lecture Notes in Math. 1001, Springer, 1983.

[Se1] Selberg, A.: Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian space with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., **20**(1956), 47-87.

[Se2] Selberg, A.: Harmonic Analysis, in "Collected papers Vol.1", Springer, 1989, pp. 626-674.

[Se-St] Serre, J. P. and Stark, H.: Modular forms of weight $1/2$, Lecture Notes in Math. 627, Springer, 1983, pp. 27-67.

[Sk] Skoruppa, N-P.: Über den Zusammenhang zwischen Jacobiformen und Modulformen halbganzen Gewichts, Bonner math. Schriften 159, Bonn, 1985.

[Sk-Za1] Skoruppa, N-P. and Zagier, D.: Jacobi forms and a certain space of modular forms, Invent. math., **94**(1988),113-146.

[Sk-Za2] Skoruppa, N-P. and Zagier, D.: A trace formula for Jacobi forms, J. reine angew. Math. **393**(1989), 168-198.